Eine leichte Methode die Momente aller Kräfte bezüglich einer beliebigen Achse zu bestimmen*

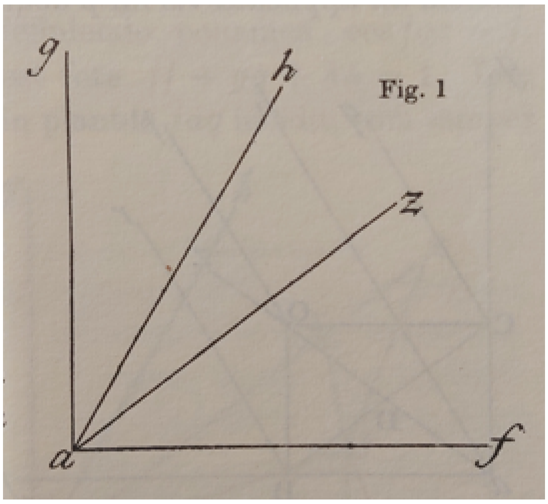
Leonhard Euler

Die Lösung des geometrischen Problems, in welchem zwischen zwei nicht in derselben Ebene liegenden Geraden deren geringste Entfernung gesucht war, hat mich, über nicht gerade wenig merkwürdige Rechnungen, zu einem außergewöhnlichen Lehrsatz aus der Mechanik geführt, welcher auf die gefälligste Weise so formuliert werden kann: *Nach Vorlage (Fig. 1) beliebiger Kräfte, wenn deren Momente bezüglich der drei zueinander normalen Achsen* af, ag, *ah gefunden worden sind, welche Momente* $\mathfrak{P}$ *in Bezug auf die Achse* af, $\mathfrak{Q}$ *in Bezug auf die Achse ag und* $\mathfrak{R}$ *in Bezug auf die Achse ah seien, dann wird aus denselben Kräften, bezüglich jedweder schrägen Achse az, welche durch den Punkt a hindurchläuft, dieses Moment entspringen:*

$$\mathfrak{P}\cos faz + \mathfrak{Q}\cos gaz + \mathfrak{R}\cos haz,$$

wenn freilich jene drei Momente im selben Sinne wirken, entweder im Sinne fgh *oder des entgegengesetzten* fhg.

*Originaltitel: "Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band* 7 (1793, geschrieben 1780): pp. 205 – 214, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 2, Band 9, pp. 399 – 406, Eneström Nummer E659, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Weil diese außerordentliche Wahrheit aus der Geometrie mit ziemlich langwierigen Rechnungen abgeleitet worden ist, besteht kein Zweifel, dass sie auch auf direktem Weg aus den Prinzipien der Statik gefolgert werden kann. Nachdem ich also diesen Gegenstand noch einmal sorgfältig betrachtet hatte, bin ich auf einen hinreichend klaren Weg gestoßen, welcher mich zu dieser Wahrheit geführt hat, und welcher mir zugleich eine leichte Methode eröffnet hat, die Momente aller Kräfte bezüglich jeder beliebigen Achse zu bestimmen.

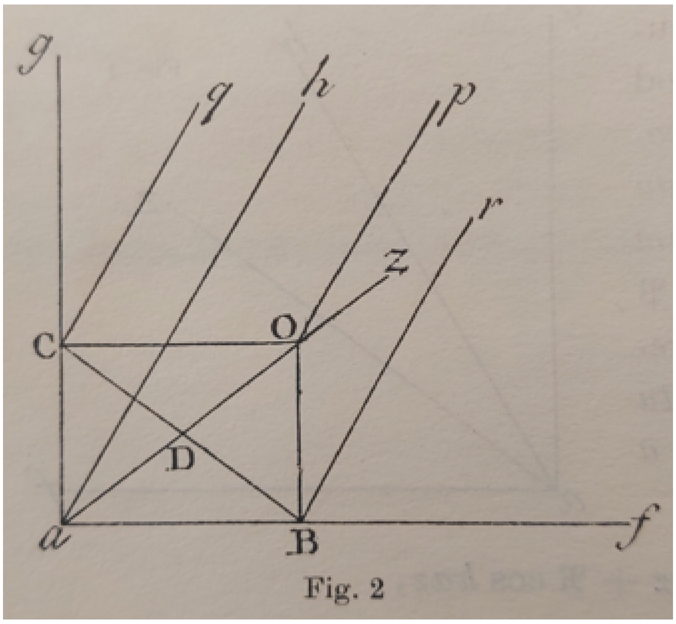
LEHRSATZ

§1 *Welche beliebige Kraft auch immer vorgelegt war, sie kann stets (Fig. 2) in drei andere aufgelöst werden, deren Richtungen in die Ebenen fag, gah, haf fallen, welche Ebenen natürlich durch die die drei zueinander normalen Achsen af, ag, ah bestimmt werden.*

BEWEIS

§2 Die vorgelegte Kraft wirke in einer beliebigen Richtung, man verlängere sie, bis sie die Ebene fag in einem beliebigen Punkt O durchläuft, in welchem Punkt also die Kraft OZ ausgeübt aufgefasst werden kann. Diese Kraft OZ wird also in zwei andere aufgelöst werden können, von denen die eine in die Ebene fag fällt, die andere hingegen, welche Op sei, zu dieser Ebene senkrecht ist. Auf diese Weise haben wir eine einzige Kraft erhalten, deren Richtung in die Ebene fag fällt; daher ist zu zeigen, wie die andere Kraft Op, welche p sei, in zwei neue aufgelöst werden kann, deren Richtungen in die Ebenen fah und gah fallen.

§3 Um dies zu leisten, fasse man im Punkt a gemäß der Richtung ah eine jener Kraft p gleiche und parallele Kraft ausgeübt auf, weil welche durch den Punkt a hindurch läuft, entsteht kein Moment bezüglich einer durch den Punkt a hindurchgezogenen Achse, und daher ist es in der Berechnung der Momente vollkommen unwesentlich, ob diese neue Kraft vorhanden ist oder nicht.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Wir wollen also diese neue Kraft auffassen vorhanden zu sein, und nach Zeichnen der Gerade Oa und Zweiteilen derselben in D, wenn in diesem Punkt D die zur Ebene BaC senkrechte und $2p$ gleiche Kraft ausgeübt verstanden wird, wird sie jenen Kräften p gleichwertig sein, und daher wird sie jener Kraft $Op = p$ gleich werden, weil ja diese Kraft für den Punkt a dasselbe Moment erzeugt wie die Kraft Op.

§4 Nun zeichne man vom Punkt O zu den Achsen af und ag die Senkrechten OB und OC, und nachdem darüber hinaus die Gerade BC gezeichnet worden ist, wird der Punkt D auf ihre Mitte fallen, woher anstelle der Kraft $2p$, die dem Punkt D aufgeprägt ist, die Kräfte $Cq = p$ und $Br = p$ eingesetzt werden können werden, deren Richtungen der Achse ah parallel sein werden, und so sind diese zwei Kräfte Cq und Br der Kraft Op gleichwertig anzusehen. Weil ja also die Richtung jener Kraft Cq in die Ebene gah fällt, die Richtung von dieser Kraft Br dahingegen in die Ebene fah, haben wir auf diese Weise die vorgelegte Kraft in drei andere aufgelöst, deren Richtungen in die Ebenen fag, fah, gah fallen, welche Kräfte also dieselbe Wirkung haben werden wie die vorgelegte Kraft.

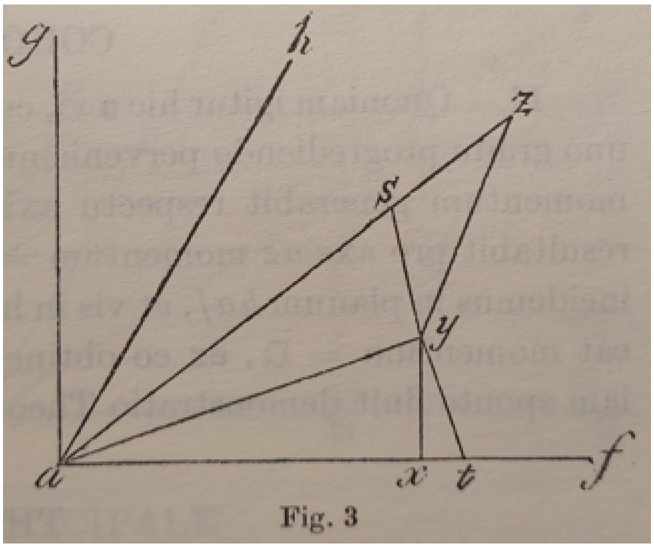
§5 Von diesen Kräften erzeugt die erste, deren Richtung in die Ebene fag fällt, kein Moment, so für die Achse af wie für die Achse ag, sondern die ganze Kraft wird quasi beim Erzeugen des Moments um die Achse ah herum verwendet. In gleicher Weise wird die zweite Kraft, deren Richtung in die Ebene fah fällt, weder für die Achse af noch für die Achse ah ein Moment erzeugen, sondern die ganze wird zur Erzeugung des Moments um die Achse ag herum aufgebracht. Und auf dieselbe Weise wird die Kraft, deren Richtung in die Ebene fah fällt, allein um die Achse af herum ein Moment erzeugen.

PROBLEM

§6 *Wenn allein eine einzige Kraft vorhanden ist, deren Richtung in die Ebene fag fällt, und ihr Moment bezüglich der Achse ah als $= \mathfrak{R}$ erkannt worden ist, das Moment derselben Kraft bezüglich einer beliebigen schiefen Achse az, die gleichermaßen durch den Punkt a hindurchgeht, ausfindig zu machen.*

LÖSUNG

§7 Für die Bestimmung (Fig. 3) dieser Achse az wollen wir $\cos faz = f$, $\cos gaz = g$, $\cos haz = h$ setzen, und es ist ersichtlich, dass $ff + gg + hh = 1$ sein wird.



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Nun sei eine beliebige Kraft vorgelegt, deren Richtung in die Ebene fag falle, sie lässt sich immer in zwei andere auflösen, von denen die eine auf die Achse af falle, die anderen sei hingegen zu ihr normal, diese lässt sich in der Tat mit der Gerade xy darstellen, wenn welche $= v$ gesetzt wird, wird ihr Moment bezüglich der Achse $v \cdot ax = \mathfrak{R}$ sein; und weil wir diese Kraft entlang der Richtung xy zu wirken angenommen haben, wird das Moment $\mathfrak{R}$ in Richtung fg wirken, oder, gemäß der Reihenfolge der Buchstaben, im Sinne fgh.

§8 Um nun das Moment dieser Kraft $xy = v$ bezüglich der Achse az zu finden, nehme man den Punkt y dort, wo die Senkrechte yz jene vorgelegte Richtung az in z trifft. Aber dann zeichne man auch die Gerade ay, und jene Kraft $xy = v$ löse man gemäß der zu ihr normalen Richtungen ya und yt auf, von welchen jene durch den Punkt a hindurchgehende nichts zum Moment beiträgt, welches wir suchen. Wenn wir daher also den Winkel $fay = \zeta$ setzen, wird die in Richtung ty wirkende Kraft $= v\cos\zeta$ sein, welche allein auf die Achse az zu wirken aufzufassen ist. Damit wir nun das Moment dieser Kraft bezüglich der Achse az finden, wollen wir von y aus zu az normal die Gerade ys zeichnen, deren Größe wir bestimmen müssen. Dort bemerke man, dass der Winkel yaz das Komplement des Winkels haz ist, dessen Kosinus wir $= h$ gesetzt haben, und so wird $\sin yaz = h$ sein, und daher das Lot $ys = ay \cdot h$. Daher weil

$$ay = \frac{ax}{\cos\zeta} \quad \text{ist, wird} \quad ys = \frac{ax \cdot h}{\cos\zeta}$$

sein.

§9 Weil also die Richtung der angreifenden Kraft $ty = v\cos\zeta$ normal zur Ebene yaz ist und dort die Gerade ys normal zu az ist, wird das Moment dieser Kraft bezüglich der Achse az auch $= v\cos\zeta \cdot ys = v \cdot ax \cdot h$ sein. Daher, weil das Produkt $v \cdot ax$ dem vorgelegten Moment $\mathfrak{R}$ gleich wird, wird dieses Moment bezüglich der Achse az entsprechend $\mathfrak{R}h$ sein, welches offenkundig auch im Sinne fgh wirkt.

KOROLLAR 1

§10 Weil die Begründung für die Kräfte, deren Richtung in die Ebenen fah und gah fallen, genau dieselbe ist, ist es nicht nötig, das ganze Argument, welches wir hier gebraucht haben, auf sie anzuwenden, sondern allein durch Übertragen, natürlich entsprechend der Reihenfolge der Buchstaben f, g, h, werden deren Momente bezüglich der Achse az schnell angeben werden können.

KOROLLAR 2

§11 Weil wir also hier von der Kraft, deren Richtung in die Ebene gah fällt, aus begonnen haben, werden wir, indem wir einen Schritt vorwärts gehen, zur Ebene gah gelangen, und die in dieser Ebene wirkende Kraft wird ein Moment bezüglich der Achse af erzeugen, wenn wir welches $= \mathfrak{P}$ setzen, wird daraus für die Achse az ein Moment $= \mathfrak{P}f$ resultieren. Und wenn wir einen weiteren Schritt vorwärts gehen, werden wir in der Ebene haf landen, und die in dieser Ebene wirkende Kraft, wenn sie bezüglich der Achse ag ein Moment $= \mathfrak{Q}$ erzeugt, wird daraus für die Achse az das Moment $\mathfrak{Q}g$ erzeugen, und daher folgt von selbst der Beweise des anfangs erwähnten Lehrsatzes.

LEHRSATZ

§12 *Nach Vorlage beliebiger Kräfte, wenn deren Momente gefunden worden waren, bezüglich der drei zueinander normalen Achsen af, ag, ah, welche Momente $\mathfrak{P}$ bezüglich der Achse af, $\mathfrak{Q}$ bezüglich der Achse ag und $\mathfrak{R}$ bezüglich der Achse ah*

seien, dann wird aus denselben Kräften bezüglich jeder schiefen Achse az, die durch den Punkt a hindurchläuft, das Moment

$$\mathfrak{P}\cos faz + \mathfrak{Q}\cos gaz + \mathfrak{R}\cos haz$$

oder auch $\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$ *entspringen.*

BEWEIS

§13 Weil sich alle Kräfte in drei andere auflösen lassen, deren Richtungen in die Ebenen fag, gah, haf fallen, und aus deren erster das Moment allein um die Achse ah herum entsteht, welches $= \mathfrak{R}$ sei, aus der zweiten aber das Moment allein um die Achse af herum, welches $\mathfrak{P}$ sei, aus der dritten dann schließlich das allein um die Achse ag, welches ag sei, ist die ganze Wirkung der angreifenden Kräfte aus diesen drei Momenten zu bestehen anzusehen. Wenn wir daher nun für die vorgelegte Achse az

$$\cos faz = f, \quad \cos gaz = g, \quad \cos haz = h$$

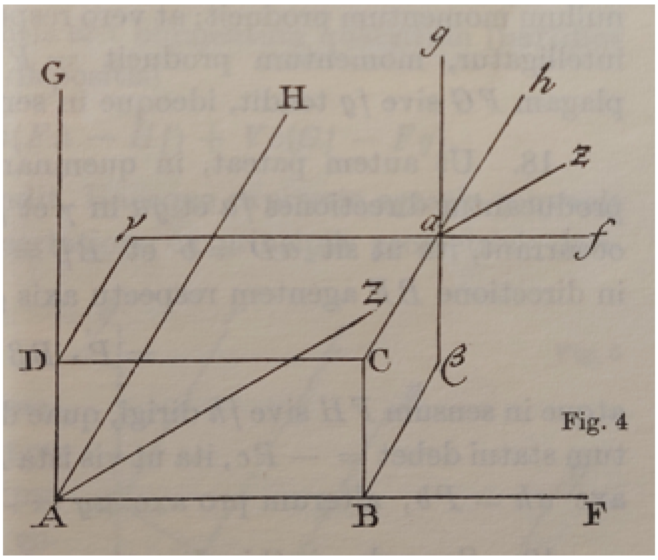
setzen, haben wir gerade gesehen, dass aus dem Moment $\mathfrak{R}$ für die Achse az das Moment $\mathfrak{R}h$ entspringt, dann aber aus dem Moment $\mathfrak{P}$ bezüglich der Achse az das Moment $\mathfrak{P}f$ und aus dem Moment $\mathfrak{Q}$ bezüglich der Achse az das Moment $\mathfrak{Q}g$. Aus allen drei Momenten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ zusammen genommen, das heißt von der ganzen Wirkung der angreifenden Kräfte, wird für die Achse az dieses Moment entspringen: $\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$, genauso wie es über große Umwege aus dem geometrischen Problem heraus gefunden worden ist.

KOROLLAR

§14 Also geht die ganze Aufgabe darauf zurück, dass von den Kräften, von welchen der um die Achse az herum bewegliche Körper angeregt wird, die Momente bezüglich der drei Achse af, ag, ah ausfindig gemacht werden, wenn welche $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ waren und in dieselbe Ebene fallen, ob im Sinne fgh oder fhg, nach Finden des Moments bezüglich der vorgelegten Achse az möglichst leicht mit der gefundenen Formeln bestimmt werden, wie welche Operation in angenehmster Weise durchgeführt werden kann, werden wir im folgenden Problem lehren.

DAS HAUPTPROBLEM

§15 *Wenn ein um die Achse az herum beweglicher Körper (Fig. 4) von einer beliebigen Kraft v, die in Richtung AZ wirkt, angeregt wird, ihr Moment bezüglich der Achse az anzugeben.*



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

§16 Vor allem anderen vergleiche man jede der beiden Richtungen az und AZ mit den drei festen und zueinander normalen Richtungen, welche für die vorgelegte Achse az hier af, ag, ah seinen, zu welchen die Achse az so geneigt sei, dass

$$\cos faz = f, \quad \cos gaz = g, \quad \cos haz = h$$

ist. In gleicher Weise beziehe man die Richtung AZ auf die drei festen Richtungen AF, AG, AH, bezüglich derer die Richtung so bestimmt werde, dass

$$\cos FAZ = F, \quad \cos GAZ = G, \quad \cos HAZ = H$$

ist. Dann fälle man aber für die Lage des Punktes a bezüglich A vom Punkt a aus zur Ebene FAG das Lot aC, und vom Punkt C aus zu AF das Lot CB, und man nenne die Strecken $AB = a$, $BC = b$, $Ca = c$, welche, wie sie in der Figur dargestellt sind, in dieselben Ebene wie die drei festen Richtungen fallen, so dass, wenn eine in die entgegengesetzte Richtung geneigt ist, sie negativ genommen werden muss.

§17 Nachdem all dies vorbereitet worden ist, löse man die Kraft $AZ = V$ in drei entlang der festen Richtungen wirkende Kräfte auf, und man nenne diese Kräfte wie folgt: entlang $AF = VF = P$, entlang $AG = VG = Q$, entlang $AH = VH = R$; und nun wollen wir die Momente dieser einzelnen Kräfte bezüglich der Achsen af, ag, ah suchen. Und zuerst erzeugt freilich die Kraft P, die in Richtung AF wirkt und welche af parallel ist, bezüglich derselben kein Moment; aber bezüglich der Achse ah, die bis hin zu C verlängert verstanden werde, erzeugt sie ein Moment $= P \cdot b$, welches Moment offenkundig in der Ebene FG oder fg wirkt, und daher im Sinne fgh.

§18 Damit aber klar wird, in welchem Sinne die übrigen Momente wirken, verlängere man die Richtungen fa und ga zu γ und β, wo sie von B und D aus konstruierte Senkrechten treffen, sodass $ad = b$ und $B\beta = D\gamma = c$ ist. Und nun wird es klar sein, dass die in Richtung BF wirkende Kraft bezüglich der Achse $ga\beta$ ein Moment

$$= P \cdot B\beta = Pc$$

erzeugt, und im Sinne FH oder fh ausgerichtet ist, weil welche Richtung eine entgegengesetzte ist, muss ihr Moment $= -Pc$ gesetzt werden, sodass diese Kraft P zwei Momente erzeugt, das eine für die Achse ah und $= Pb$, das andere für die Achse $ag = -Pc$.

§19 Die zweite Kraft Q, welche in Richtung AG wirkt, weil sie der Achse ag parallel ist, wird bezüglich derselben kein Moment erzeugen; aber bezüglich der Achse ah oder Ch wird sie das Moment Qa erzeugen, welches im Sinne GF oder gf wirkt, also der entgegengesetzten Richtung FGH, und daher wird es $= -Qa$ gesetzt werden müssen. Aber dann wird dieselbe Kraft Q, bezüglich der Achse fa oder $f\gamma$, das Moment Qc erzeugen, und das im Sinne GH, und wird das $+Qc$ zu setzen sein, und so entstehen aus dieser Kraft Q zwei Momente, das eine für die Achse af und $= Qc$, das andere für die Achse ah und $= -Qa$.

§20 Schließlich erzeugt die Kraft R, die in Richtung AH wirkt, bezüglich der Achse ah kein Moment; aber bezüglich der Achse fa oder $f\gamma$ wird sie das Moment Rb erzeugen, und zwar im entgegengesetzten Sinn, und wird daher negativ zu nehmen sein. Aber bezüglich der Achse ag, oder βg, wird das positive Moment Ra generiert.

§21 Wenn wir also nun die Momente für die Achse af, ag, ah wie oben mit den Buchstaben $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ anzeigen, wenn wir die gefundenen Momente sammeln, werden wir

$$\mathfrak{P} = Qc - Rb, \quad \mathfrak{Q} = Ra - Pc, \quad \mathfrak{R} = Pb - Qa$$

haben. Daher, weil $P = VF$, $Q = VG$, $R = VH$ ist, werden diese Momente

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= V(Gc - Hb), \\ \mathfrak{Q} &= V(Ha - Fc), \\ \mathfrak{R} &= V(Fb - Ga), \end{aligned}$$

sein.

§22 Wir wollen nun das gesuchte Moment für die vorgelegte Achse az hier $= \mathfrak{M}$ setzen, und mit dem zuvor bewiesenen Lehrsatz ist klar, dass

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}g + \mathfrak{R}h$$

sein wird. Nachdem also die gerade gefundenen Werte eingesetzt worden sind, wird das gesuchte Moment (nach Ordnen der Bestandteile der Formel gemäß der Strecken a, b, c)

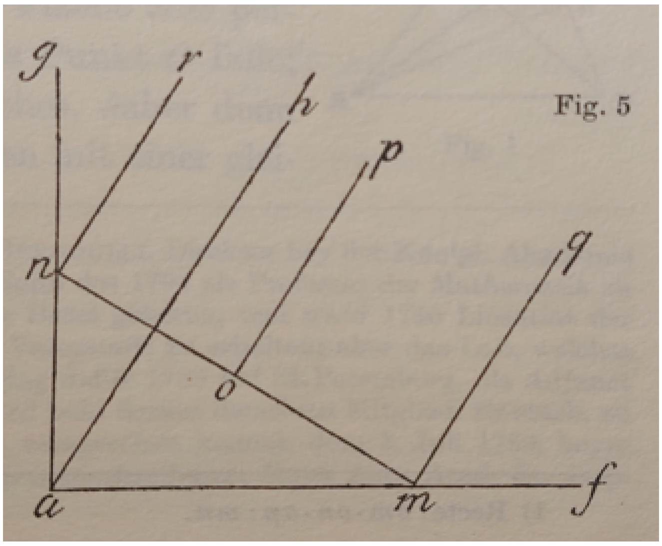
$$\mathfrak{M} = Va(Hg - Gh) + Vb(Fh - Hf) + Vc(Gf - Fg)$$

sein, welches Moment also im Sinn FGH wirkt. Und dieser Ausdruck stimmt hervorragend mit der Form überein, welche wir in der vorhergehenden Abhandlung aus geometrischen Prinzipien heraus hergeleitet haben.

SCHOLION

§23 Der Beweis des ersten Lehrsatzes kann eleganter formuliert werden, sodass es nicht vonnöten ist, eine neue externe Kraft, die im Punkt a auszuüben ist, zur Hilfe zu nehmen. Nachdem natürlich (Fig. 5) die Richtung der angreifenden Kraft durch die Ebene fag hindurch verlängert worden ist, welche sie im Punkt o schneide, wo sie ausgeübt verstanden werde, und in zwei Kräfte aufgelöst worden ist, von welchen die eine in die Ebene fag fällt, die andere op hingegen zur ihr normal ist, ziehe man durch den Punkt o hindurch nach Belieben die Gerade mn, die die Achsen af und ag in den Punkten m und n schneide, woher die zwei Kräfte mq und nr der Kraft op selbst parallel festlegt werden können, welche selbiger auch gleichwertig sind, was geschieht, wenn diese Kräfte so genommen werden:

$$mq = \frac{on \cdot op}{mn} \quad \text{und} \quad nr = \frac{om \cdot op}{mn}.$$



Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Auf diese Weise wird nämlich die Summe der Kräfte $mq + nr = op$ sein, und deren Momente bezüglich o werden einander gleich werden und zwar $= om \cdot on \cdot op$, wie es die Natur der Sache erfordert. Und so haben wir anstelle der Kraft op nun die zwei Kräfte mq und nr erhalten, von welchen die eine in der Ebene fah liegt, die andere hingegen in der Ebene gah; daher wird besser klar, dass alle Kräfte immer in drei andere aufgelöst werden können, deren Richtungen in die Ebenen fag, gah, haf fallen.